PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO: Plantear y resolver problemas que requieren del concepto de función de una variable para modelar y de la derivada para resolver.

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES

1.1 La recta numérica.
1.2 Los números reales.
1.3 Propiedades de los números reales.
1.3.1 Tricotomía.
1.3.2 Transitividad.
1.3.3 Densidad.
1.3.4 Axioma del supremo.
1.4 Intervalos y su representación mediante desigualdades.
1.5 Resolución de desigualdades de primer grado con una incógnita y de desigualdades cuadráticas con una incógnita.
1.6 Valor absoluto y sus propiedades.
1.7 Resolución de desigualdades que incluyan valor absoluto.

UNIDAD 2. FUNCIONES

2.1 Concepto de variable, función, dominio, condominio y recorrido de una función.
2.2 Función inyectiva, suprayectiva y biyectiva
2.3 Función real de variable real y su representación gráfica.
2.4 Funciones algebraicas: función polinomial, racional e irracional.
2.5 Funciones trascendentes: funciones trigonométricas y funciones exponenciales.
2.6 Función definida por más de una regla de correspondencia, función valor absoluto.
2.7 Operaciones con funciones: adición, multiplicación, composición.
2.8 Función inversa. Función logarítmica. Funciones trigonométricas inversas.
2.9 Funciones con dominio en los números naturales y recorrido en los números reales: las sucesiones infinitas.
2.10 Función implícita.

UNIDAD 3. LÍMITES Y CONTINUIDAD
3.1 Límite de una sucesión.
3.2 Límite de una función de variable real.
3.3 Cálculo de límites.
3.4 Propiedades de los límites
3.5 Límites laterales.
3.6 Límites infinitos y límites al infinito.
3.7 Asíntotas.
3.8 Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo.
3.9 Tipos de discontinuidades.

UN IDAD 4. DERIVADAS

4.1 Conceptos de incremento y de razón de cambio. La derivada de una función.
4.2 La interpretación geométrica de la derivada.
4.3 Concepto de diferencial. Interpretación geométrica de las diferenciales.
4.4 Propiedades de la derivada.
4.5 Regla de la cadena.
4.6 Fórmulas de derivación y fórmulas de diferenciación.
4.7 Derivadas de orden superior y regla L´Hôpital.
4.8 Derivada de funciones implícitas.

UNIDAD 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 Recta tangente y recta normal a una curva en un punto. Curvas ortogonales.
5.2 Teorema de Rolle, teorema de Lagrange o teorema del valor medio del cálculo diferencial.

5.3 Función creciente y decreciente. Máximos y mínimos de una función. Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos. Concavidades y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

5.4 Análisis de la variación de funciones

5.5 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial.

5.6 Problemas de optimización y de tasas relacionadas.

FUENTES DE INFORMACIÓN

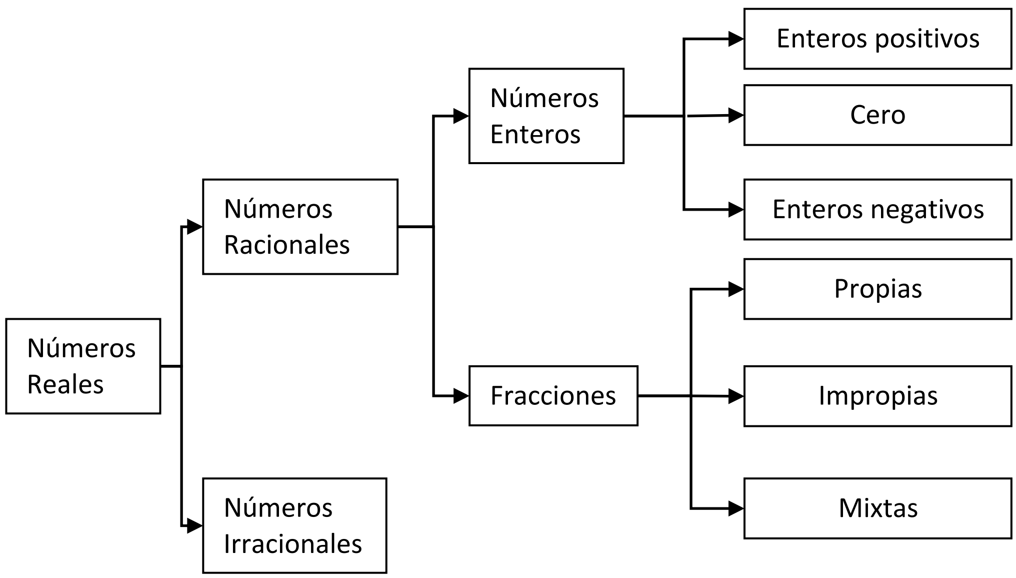
1. Larson, Ron. *Matemáticas 1 (Cálculo Diferencial)*, McGraw-Hill, 2009.
2. Purcell, Edwin J. *Cálculo*, Editorial Pearson, 2007.
3. Ayres, Frank. *Cálculo*, McGraw-Hill, 2005.
4. Leithold, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Oxford University Press, 2009.
5. Granville, William A. *Cálculo Diferencial e Integral*, Editorial Limusa, 2009.
6. Hasser, Norman B. *Análisis matemático* Vol. 1, Editorial Trillas, 2009.
7. Courant, Richard. *Introducción al cálculo y análisis matemático* Vol. I, Editorial Limusa, 2008.

Matemáticas I (Cálculo diferencial)

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES

1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS NUMEROS REALES

Los números reales son todos los números que se pueden representar en la recta numérica. La unión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de los números reales.



Números racionales

Los números racionales son los números enteros positivos y negativos, el número cero y los fraccionarios de la forma a/b siendo a y b números enteros y $b \neq 0$.

Números enteros (positivos negativos y cero):

…..,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,……

Fracciones (positivas y negativas):

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad -\frac{5}{10}, \quad -\frac{1}{20}$$

Los números racionales pueden expresarse por decimales finitos o infinitos periódicos

Decimal finito:

$$\frac{2}{5} = 0.4, \qquad \frac{7}{4} = 1.75$$

Decimal infinito o periódico:

$\frac{2}{3} = 0.66666 \ldots \ldots \ \frac{61}{111} 0.549549549 \ldots \ldots$

Números irracionales

Los números que no se pueden expresar como decimales finitos ni periódicos se denominan números irracionales. Los números irracionales no se pueden expresar como una relación entre números enteros. Ejemplos de números irracionales:

$\sqrt{2} = 1.4142135 \ldots . \quad \pi = 3.1415926 \ldots \ldots \quad \sqrt[3]{5} = 1.3797296 \ldots \ldots$

1.2 PROPIEDADES

Se distinguen dos categorías: propiedades algebraicas y propiedades de orden

Las propiedades algebraicas dicen que los números reales pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos (excepto por cero) para generar más números reales bajo las reglas de aritmética usual. A continuación se especifican algunas propiedades algebraicas en las operaciones de suma y producto de números reales:

$1. Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c)$

$(a.b).c = a(b.c)$

$2. Conmutativa: a + b = b + a$

$a.b = b.a$

$3. Distributiva: a.(b + c) = a.b + a.c$

$4. Identidad: existe\ un\ numero\ 0\ tal\ que\ a + 0 = a$

$existe\ un\ numero\ 1\ tal\ que\ a.1 = a$

Las propiedades de orden de los números reales permiten comparar el tamaño de estos. Estas propiedades son útiles a la hora de resolver *desigualdades.* Hay resultados parecidos cuando se invierten los signos de desigualdad.

$$SEAN\ a, b, c, d\ y\ k\ NUMEROS\ REALES$$

$1.\ Si\ \ a < b\ \ y\ \ b < c, \quad entonces:\ a < c$ Propiedad transitiva

$Ejemplo:\ 5 < 6\ \ y\ \ 6 < 7,\ \ entonces: 5 < 7$

$2.\ Si\ \ a < b,\ \ entonces:\ a + k < b + k$ Suma de una constante

$$Ejemplo:\ 5 < 6,\ \ entonces: 5 + 3 < 6 + 3$$

3. $Si\ \ a < b\ \ y\ \ c < d,\ entonces:\ \ a + c < b + d$ Suma de desigualdades

$Ejemplo:\ 4 < 5\ \ y\ \ 6 < 7,\ \ entonces: 4 + 6 < 5 + 7$

4. $Si\ \ a < b\ \ \ y\ \ c > 0,$

$entonces: ac < bc$ Producto por una cte. positiva

$Ejemplo:\ 4 < 5\ \ \ y\ \ c > 0,\ \ entonces: 4(2) < 5(2)$ $(no\ cambia\ el\ sentido)$

5. $Si\ \ a < b\ \ y\, c < 0,$

$entonces: ac > bc$ Producto por una cte. negativa

$Ejemplo:\ 4 < 5\ \ \ y\ \ c < 0,\ \ entonces: 4(-2) > 5(-2)$ $(cambia\ el\ sentido)$

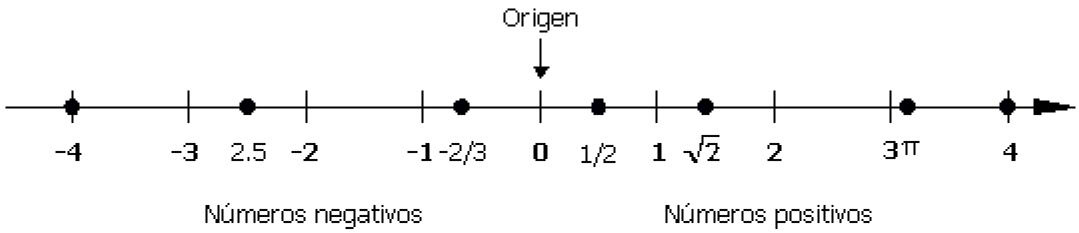
Cuando se multiplica por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, dada la desigualdad $x < 4$, si se multiplican ambos miembros por -3, esto da como resultado $-3x > -12$. Esto se aplica también a la división por un número negativo. Así, dada la desigualdad $-2x > 4$, si se dividen ambos miembros de la desigualdad por -2, entonces $x < -2$.

1.3 LA RECTA NUMÉRICA

Los números reales se representan geométricamente por medio de puntos en la recta numérica. Se llama recta numérica a una línea en la cual están determinados:

- un punto O que se denomina origen y corresponde al número real cero
- una dirección positiva que se indica con una flecha, y una dirección negativa
- una escala para medir longitudes

En general, la recta numérica se representa en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto O. De esta manera los números que corresponden a los puntos a la derecha de O en la figura 1.1 son los números reales positivos, mientras que los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los números reales negativos. El cero no es positivo ni negativo.



1.4 INTERVALOS Y SU REPRESENTACIÓN MEDIANTE DESIGUALDADES

Al estudiar las desigualdades es conveniente usar la notación y terminología de los conjuntos. **Un conjunto** es una colección de elementos, tal como el conjunto de los números reales. Si todo elemento de un conjunto *S* es también un elemento de un conjunto *T* entonces se dice que S es un **subconjunto** de *T.*

El **dominio de una variable** es el conjunto de los números reales que la variable representa. Por ejemplo, $\sqrt{x}$ es un numero real si y solo si $x \geq 0$ y, por lo tanto, el dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos o en notación intervalo $[0,\ \infty)$. De esta manera.

Un **intervalo** es un subconjunto o porción de la recta real. Estos se clasifican en finitos e infinitos. A continuación se presentan los diferentes tipos de intervalos que se utilizarán para resolver desigualdades

El **intervalo abierto** es el conjunto de todos los números reales mayores que *a* y menores que *b*, donde *a* y *b* son los extremos del intervalo.

$$(a, b) = a < x < b$$

Se observa que los extremos no están incluidos en un intervalo abierto, los intervalos que incluyen sus extremos se llaman **intervalos cerrados** y se denotan por.

$$[a, b] = a \leq x \leq b$$

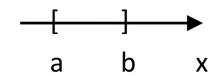
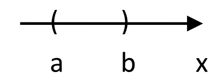
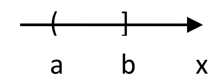
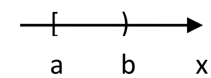
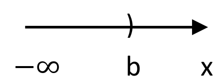
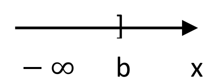
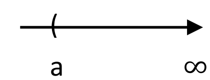
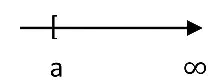
El **intervalo semiabierto por la izquierda** es el conjunto de números reales mayores que a y menores o iguales que b.

$$(a, b] = a < x \leq b$$

El **intervalo semiabierto por la derecha** es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b.

$$[a, b) = a \leq x < b$$

Los intervalos anteriores son intervalos finitos. En la siguiente tabla se muestra un resumen de los tipos de intervalos finitos e infinitos, así como su representación gráfica. **Nota:** el símbolo ∞ solo es un medio de notación, no es número real. El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de todos los números reales.

INTERVALO	**NOTACION DE INTERVALO**	**NOTACION DE DESIGUALDAD O DE CONJUNTOS**	**GRAFICA LINEAL**
Intervalo cerrado	[a, b]	$a \le x \le b$	
Intervalo abierto	(a, b)	$a < x < b$	
Intervalo semiabierto por la izquierda	(a, b]	$a < x \le b$	
Intervalo semiabierto por la derecha	[a, b)	$a \le x < b$	
Intervalo infinito abierto por la derecha	(- ∞, b)	$x < b$	
Intervalo infinito cerrado por la derecha	(- ∞, b]	$x \le b$	
Intervalo infinito abierto por la izquierda	(a, ∞)	$x > a$	
Intervalo infinito cerrado por la izquierda	[a, ∞)	$x \ge a$	

1.5 RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA Y DE DESIGUALDADES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Antes de resolver algunos tipos de desigualdades se revisará su definición.

Desigualdad. Es la relación matemática en la que se tiene en cuenta el orden de los números. Las expresiones pueden contener números, variables o ambos. Por ejemplo: a < b, x > 3, 5x+3<0,…, etc.

Resolver una desigualdad consiste en hallar todas sus soluciones, es decir, encontrar todos los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad. Para este propósito se utilizan las propiedades de orden. La solución de una ecuación es, por lo general, un intervalo o una unión de intervalos de números reales. Es conveniente ilustrar la solución de una desigualdad en la recta numérica.

A continuación se muestran algunas de las propiedades más comunes que se utilizan para resolver desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

Para números reales a, b, c cualesquiera

1. PROPIEDAD DE LA ADICIÓN

Si $\mathrm{a} < b$, entonces $\mathrm{a} + \mathrm{c} < b + c$; es decir se puede **sumar el mismo número** a ambos miembros de la desigualdad y **no cambia su sentido**. Por ejemplo:

$$x - 2 > 4$$
$$x \cancel{- 2 + 2} > 4 + 2$$
$$x > 6$$

2. PROPIEDAD DE LA SUSTRACCIÓN

Si $\mathrm{a} < b$, entonces $\mathrm{a} - \mathrm{c} < b - \mathrm{c}$; es decir se puede **restar el mismo número** a ambos miembros de la desigualdad **no cambia, el sentido** de la desigualdad. Por ejemplo

$$x + 2 > 4$$
$$x \cancel{+ 2 - 2} > 4 - 2$$
$$x > 2$$

3. PROPIEDAD DE LA MULTIPLICACIÓN

a) Si $a < b$ y c es **positivo**, entonces $c.a < c.b$; es decir, se puede **multiplicar con el mismo número** positivo ambos miembros de la desigualdad **no cambia, el sentido** de la desigualdad. Por ejemplo:

$$\frac{x}{2} < 3$$
$$2\left(\frac{x}{2}\right) < 2(3)$$
$$x < 6$$

b) Si $a < b$ y c es **negativo**, entonces $c.a < c.b$; es decir, se puede **multiplicar con el mismo número** negativo ambos miembros de la desigualdad **cambia, el sentido** de la desigualdad. Por ejemplo:

$$-2x < 3$$
$$-\tfrac{1}{2}(-2x) < -\tfrac{1}{2}(3)$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

4. PROPIEDAD DE LA DIVISIÓN

a) Si $a < b$ y c es **positivo**, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; es decir, se puede **dividir con el mismo número** positivo ambos miembros de la desigualdad **no cambia, el sentido** de la desigualdad. Por ejemplo:

$$2x < 3$$
$$\tfrac{1}{2}(2x) < \tfrac{1}{2}(3)$$
$$x < \tfrac{3}{2}$$

b) Si $a < b$ y c es **negativo**, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; es decir, se puede **dividir con el mismo número** negativo ambos miembros de la desigualdad **cambia, el sentido** de la desigualdad. Por ejemplo:

$$-2x < 3$$
$$-\tfrac{1}{2}(-2x) < -\tfrac{1}{2}(3)$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Se cumplen propiedades similares si se invierten los signos de la desigualdades, o si se remplazan < por ≤ y > por ≥ . En conciencia, se ve que las operaciones con desigualdades son en esencia las mismas que las que se efectúan con ecuaciones. Cuando se trabaje con desigualdades, se debe tener especial cuidado con el uso de las propiedades de la multiplicación y de la división. **Nota**: El sentido de la desigualdad se invierte cuando se multiplica o divide ambos miembros de una desigualdad entre un número negativo.

Conjunto solución de una desigualdad. Es el conjunto de elementos que al sustituirlos en la desigualdad la hacen verdadera

RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Caso 1) Desigualdad lineal

1). Resuelva las siguientes desigualdades expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

a) $x+1>3$

$$x+1-1>3-1$$

$$x>2$$

Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(2,\infty)=\{x: x>2\}$

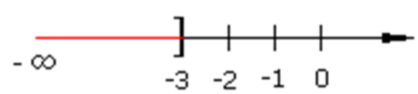
$b)$ $4-2x\geq 10$

$$4-4-2x\geq 10-4$$

$$-2x\geq 6$$

$$\frac{-2x}{-2}\leq\frac{6}{-2}$$

$x\leq -3$ Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(-\infty,-3]=\{x: x\leq -3\}$

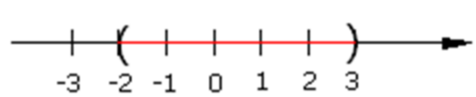
$d)$ $-4<5t+6<21$

$$-4-6<5t+6-6<21-6$$

$$-10<5t<15$$

$$\frac{-10}{5}<\frac{5t}{5}<\frac{15}{5}$$

$-2<t<3$ Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(-2,3)=\{t: -2<t<3\}$

$d)\qquad 2 \le 3m - 7 < 14$

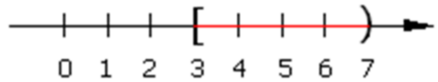
$$2 + 7 \le 3m - 7 + 7 < 14 + 7$$

$$9 \le 3m < 21$$

$$\frac{9}{3} \le \frac{3m}{3} < \frac{21}{3}$$

$$3 \le m < 7$$

Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(3, 7) = \{m: 3 \le m < 7\}$

Encuentre el conjunto solución de cada una de las desigualdades siguientes. Además determinar: la grafica, la notación de intervalo y la notación de conjuntos.

$x-3>5$	$2x+6<-2$	$4x-7<3x+5$
$9-3x\le 2$	$8x>12x-20$	$-6<2x+3<-1$
$2x+16\le 26$	$3x-5\ge 7$	$3x+5>7x+17$
$10x+1>8x+5$	$-2<1-5x\le 3$	$-3<4x-9<11$
$4<5-3x<7$	$x+5\le 0$	$2x-1\ge 0$

Caso 2) Desigualdades de segundo grado

Antes de empezar a resolver desigualdades cuadráticas se dará una breve explicación del método que se utilizará para este fin.

¿Cómo resolver desigualdades lineales de segundo grado (cuadráticas)?

$$x^2 - c < bx$$

Si después de reunir en el primer miembro todos los términos no nulos, se puede factorizar este primer miembro en factores de primer grado, entonces se puede resolver la desigualdad.

$$x^2 - c < bx$$

$$x^2 - bx - c < 0$$

$$(x + a)(x - b) < 0$$

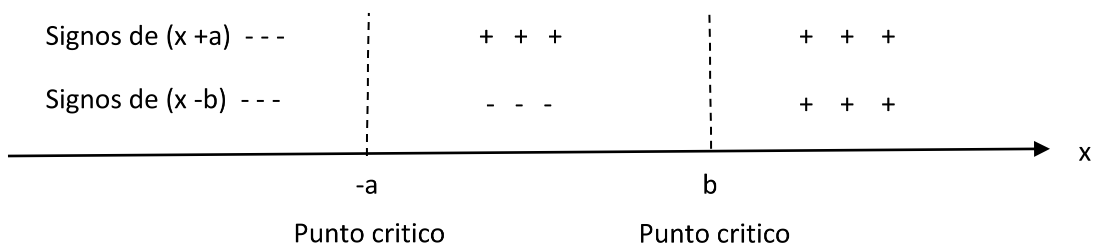
Se buscan los valores de x que hagan que el primer miembro sea menor que cero, (es decir, negativo). ¿Cuáles deben ser los signos de $(x + a)(x - b)$ para que su producto sea negativo? Deben tener signos contrarios.

Se tiene que ver si se puede determinar dónde es positivo, negativo o nulo cada factor. El punto en el que un factor se anula se llama punto crítico. Después se verá por qué. Es conveniente resumir estos resultados en el eje real.

Por consiguiente, $(x+a)$ es negativo para valores de x a la izquierda de $-a$ y es positivo para valores de x a la derecha de $-a$

Por lo tanto, $(x-b)$ es negativo para valores de x a la izquierda de x y positivos para valores de x a la derecha de b.

Combinando los resultados en un eje numérico real sencillo (figura 2) se llega a una solución simple del problema original.



TEOREMA. El valor de x para el cual se anula $(ax+b)$ se llama punto crítico de $ax+b$. Esta expresión tiene un signo a la izquierda del punto crítico en el eje numérico real y el signo opuesto a la derecha $(a \neq 0)$

1.- Cuando el signo de relación es $<$ ó $\leq$ el signo de los intervalos deben de ser de signo contrario y se obtiene un intervalo abierto o cerrado dependiendo del signo de relación.

2.- Cuando el signo de relación es $>$ ó $\geq$ el signo de los extremos son del mismo signo se obtienen dos intervalos infinitos uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha.

A continuación se muestra un ejemplo de desigualdad cuadrática y se muestra el procedimiento para encontrar su conjunto solución.

1). Resuelva la siguiente desigualdad expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

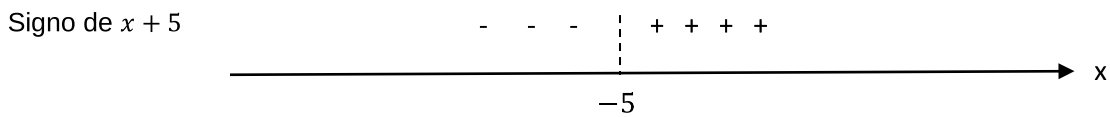
$a)\ x^2 < 10 - 3x$

Pasando los términos de la derecha a la izquierda e igualando la ecuación a cero se tiene $x^2 + 3x - 10 < 0$

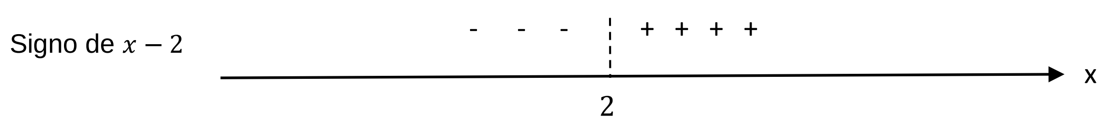
Al factorizar la ecuación en el primer miembro en términos de primer grado se tiene

$(x + 5)(x - 2) < 0$

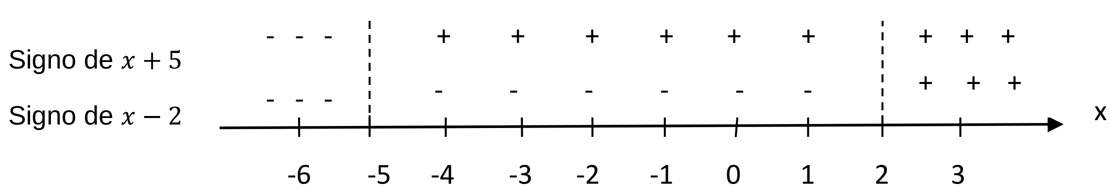
Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x + 5 = 0$	$x + 5 > 0$	$x + 5 < 0$
$x = -5$	$x > -5$	$x < -5$



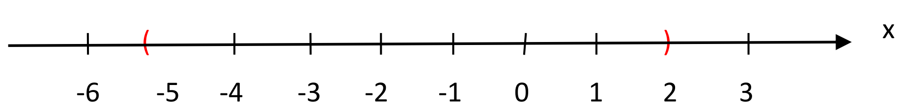
Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x - 2 = 0$	$x - 2 > 0$	$x - 2 < 0$
$x = 2$	$x > 2$	$x < 2$



Se unen las dos graficas para conocer la solución del problema



La grafica del problema



La solución del problema

$$(-5, 2) = \{x: -5 < x < 2\}$$

2) Resuelva la siguiente desigualdad expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

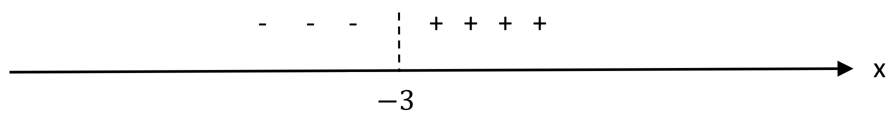
b) $x^2 + x - 6 > 0$

Al factorizar la ecuación en el primer miembro en términos de primer grado se tiene

$(x + 3)(x - 2) > 0$

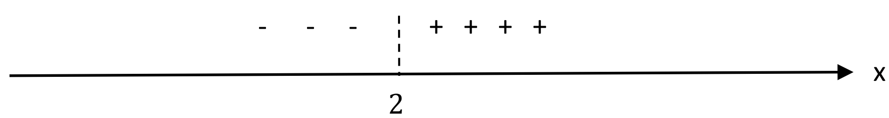
Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x + 3 = 0$	$x + 3 > 0$	$x + 3 < 0$
$x = -3$	$x > -3$	$x < -3$

Signo de $x + 3$



Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x - 2 = 0$	$x - 2 > 0$	$x - 2 < 0$
$x = 2$	$x > 2$	$x < 2$

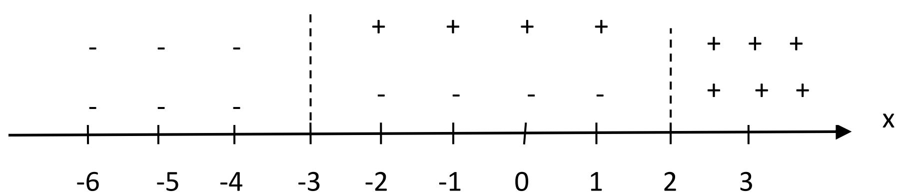
Signo de $x - 2$



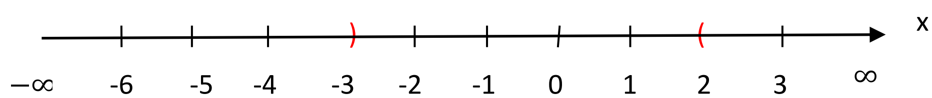
Se unen las dos graficas para conocer la solución del problema

Signo de $x + 5$

Signo de $x - 2$



La grafica del problema



La solución del problema

$$(-\infty, -3)U(2, \infty) = \{x: x < -3 \;\; y \;\; x < 2\}$$

Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica.

$x^2 - 12x + 27 < 0$	$y^2 - y - 12 > 0$	$x^2 + 2x - 35 > 0$
$x^2 + 15x + 36 \geq 0$	$y^2 - 2y - 35 \leq 0$	$x^2 - x - 2 \leq 0$
$x^2 + 13x + 36 < 0$	$x^2 + 12x + 20 \geq 0$	$x^2 + 13x + 40 \geq 0$
$x^2 - 9x + 20 \leq 0$	$y^6 - 7y^3 - 18 < 0$	$x^2 - 6x - 72 \leq 0$
$2x^2 - 3x - 9 < 0$	$3y^2 - 2y - 8 > 0$	$5x^2 - 3x - 2 \leq 0$
$6x^2 - 7x + 2 \geq 0$	$2y^2 - 11y + 12 > 0$	$2x^2 + 5x - 9 \leq 0$
$8x^2 + x - 9 < 0$	$20y^2 - 9y - 20 \geq 0$	$6x^2 + 5x - 6 \leq 0$

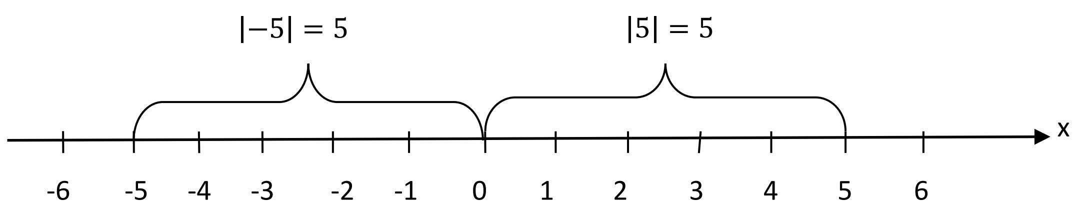
1.6 VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES

Geométricamente, el valor absoluto es la distancia de un número *x* al cero en la recta real, y se define de la siguiente manera.

$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$ Se interpreta como el valor abs de x es x si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$

Por lo tanto, el valor absoluto de un número nunca es negativo porque por definición el valor absoluto de *a* siempre será mayor o igual que cero, y nunca negativo.

Por ejemplo si $|x| = 5, x$ puede ser $-\ 5\ ó\ 5$



Propiedades fundamentales

1. No negatividad $|x| \geq 0$ } A partir de que las distancias siempre son positivas o cero

2. Definición positiva $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. Multiplicativa $|xy| = |x||y|$

4. Aditiva $|x + y| = |x| + |y|$

5. Simetría $|-x| = |x|$ } Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto

6. Identidad de indiscernible (equivalente a la definición positiva)

$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

7. Desigualdad triangular (equivalente a la propiedad aditiva)

$|a - b| \leq \big||a - c| - |c - b|\big|$

$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$

8. Preservación de la división (Equivalente a la propiedad multiplicativa)

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ si\ b \neq 0$

9.- $\sqrt{x^2} = |x|$ $\quad |x|^2 = x^2$

Las siguientes afirmaciones son útiles cuando se resuelven ecuaciones o desigualdades que envuelven valores absolutos

Propiedades de desigualdades y valores absolutos

Si a es cualquier número real positivo

1. $|f(x)| = a \quad si\ y\ solo\ si \quad x = \pm a$

2. $|f(x)| < a \quad si\ y\ solo\ si \quad -a < x < a$

3. $|f(x)| > a \quad si\ y\ solo\ si \quad x > a \ \text{ó}\ x < -a$

4. $|f(x)| \leq a \quad si\ y\ solo\ si \quad -a \leq x \leq a$

5. $|f(x)| \geq a \quad si\ y\ solo\ si \quad x \geq a \ \text{ó}\ x \leq -a$

1.6 RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES QUE INCLUYAN VALOR ABSOLUTO

1). Resuelva la siguiente desigualdad con valores absolutos. Determine el conjunto solución, la gráfica, la notación de intervalos y la de conjuntos.

a) $|2\text{x} - 1| < 3$

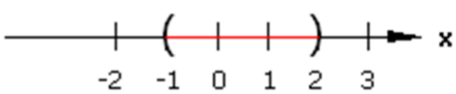
$-3 < 2x - 1 < 3$ Utilizando propiedad 2 de desigualdades

$-3 + 1 < 2x - 1 + 1 < 3 + 1$ Sumando 1

$-2 < 2x < 4$ simplificando

$\frac{-2}{2} < \frac{2\text{x}}{2} < \frac{4}{2}$ Dividiendo entre 2

$-1 < x < 2$ Solución



Notación de Intervalo y de conjunto

$(-1, 2) = \{\text{x}: -1 < x < 2\}$

Gráfica

b) $|4x - 3| > 5$

$4x - 3 < -5$

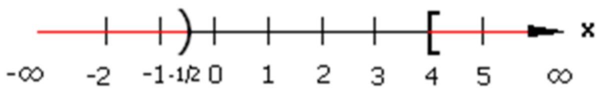
$4x - 3 > 5$ Utilizando propiedad 3 de desigualdades

$4x - 3 + 3 < -5 + 3$ $\quad$ $4x - 3 + 3 > 5 + 3$ $\quad$ Sumando 3

$4x < -2$ $\quad$ $4x > 8$ $\quad$ Simplificando

$\frac{4x}{4} < \frac{-2}{4}$ $\quad$ $\frac{4x}{4} > \frac{8}{2}$ $\quad$ Dividiendo entre 4

$x < -\frac{1}{2}$ $\quad$ $x > 4$ $\quad$ Solución



Gráfica

Notación de Intervalo y de Conjunto

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \mathrm{U} (4, \infty) = \left\{x: x < -\frac{1}{2} \text{ y } x > 4\right\}$$

En los problemas encuentre el conjunto solución de las desigualdades con valor absoluto dadas. Además graficar y anotar la notación de intervalo y la notación de conjunto.

$|x + 1| < 4$ $\quad$ $|3x + 4| \leq 8$ $\quad$ $|x - 2| < 5$

$|2x - 7| > 3$ $\quad$ $\left|\frac{x}{3} - 2\right| \geq 6$ $\quad$ $\left|\frac{3x}{5} + 1\right| > 4$

$|2x - 7| \leq 4$ $\quad$ $|5x - 6| > 1$ $\quad$ $|4x + 2| \geq 10$

$|2x + 1| \geq 7$ $\quad$ $|3x + 5| < 8$ $\quad$ $|x + 10| > 5$

$\left|\frac{x}{2} + 7\right| \leq 2$ $\quad$ $\left|2 + \frac{5}{x}\right| \geq 1$ $\quad$ $\left|\frac{1}{x} - 3\right| < 6$

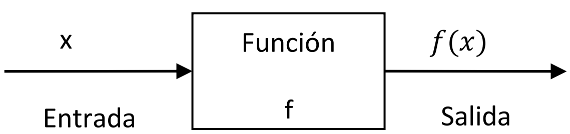
UNIDAD 2. FUNCIONES

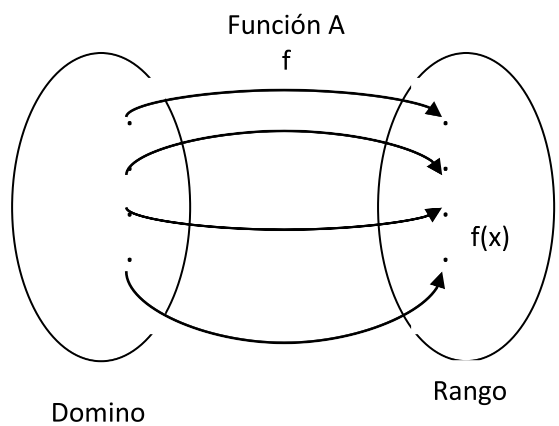
2.1 CONCEPTO DE VARIABLE, FUNCIÓN, DOMINIO, CODOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.

VARIABLE. Es una literal a la que se le pueden asignar, un número ilimitado de valores; las cuales se designan usualmente con las últimas letras del alfabeto las cuales son p, q, r, s, t, u, w, x, y, z. y algunas letras del alfabeto griego.

CONSTANTE. Es una cantidad o literal que tiene valor fijo; se representa con las primera letras del alfabeto son a, b, c, d y e. También los números

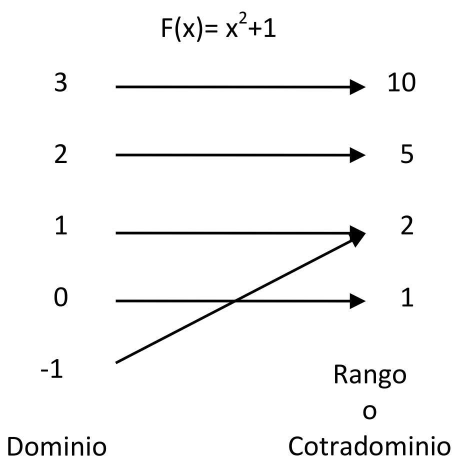
FUNCIÓN. f Es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x de un conjunto llamado dominio un valor único $f(x)$ del segundo conjunto.





DOMINIO. Es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores.

RANGO. Es el conjunto de valores obtenidos de la función.



NOTACIÓN DE FUNCIÓN. Es el que se denomina con la letra $f(x)$ que se le “f de x”; designa el valor que “f asigna a x”. Por lo tanto, si $f(x) = x^2 - 4$,

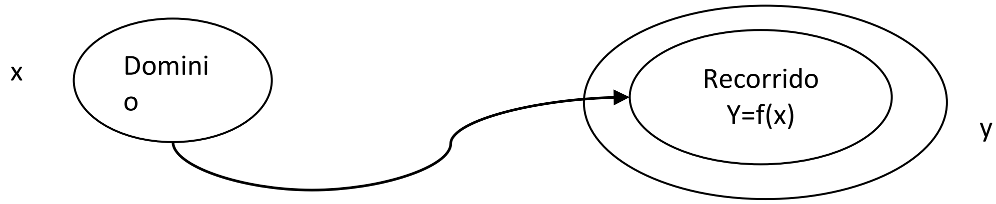
$$f(x) = x^2 - 4$$
$$f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$
$$f(a+h) = (a+h)^2 - 4 = a^2 + 2ah + h^2 - 4$$

DOMINIO NATURAL. Es cuando no se especifica dominio para una función, siempre supondremos que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y de valores de números reales.

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN. Se define como el subconjunto de "y" formado por todas las imágenes de los números de x.

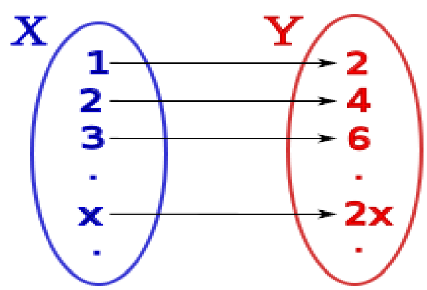
IMAGEN. Se le denomina así al número y



2.2 FUNCIÓN INYECTIVA, SUPRAYECTIVA Y BIYECTIVA

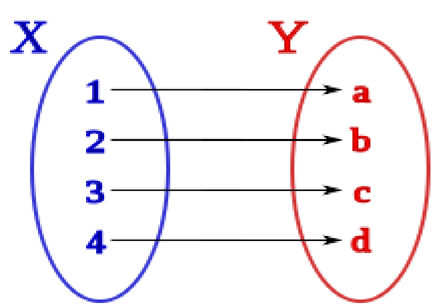
FUNCIÓN INYECTIVA. Es cuando a cada elemento del conjunto X (dominio) le corresponde un solo valor distinto en el conjunto Y (imagen) de f tal que, en el conjunto X no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen. . En otras palabras, de todo los pares x, y pertenecen a la función, la "y" no se repiten. Por ejemplo

$$\boldsymbol{f(x) = 2x}$$



FUNCIÓN SUPRAYECTIVA. Es cuando a cada elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio. Es decir; es cuando en la función f(x) =y su recorrido es todo y

FUNCIÓN BIYECTIVA. Es cuando una función es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. Es una función f con dominio D y contradominio E, siempre que $a \neq b$ en D entonces $f(a) \neq f(b)$ en E



2.3 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

FUNCIÓN REAL f es una función matemática cuyo dominio y codominio están contenidos en $\mathbb{R}$, es decir, es una función: $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S' \subseteq \mathbb{R}$

En general se trata de funciones continuas, o bien discontinuas cuando están representadas por tramos, a diferencia de las funciones discretas, que son siempre discontinuas.

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN. Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}$ para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR UNA FUNCION.

Para hacer la grafica de una función seguimos un procedimiento simple de tres pasos; los cuales son:

1.- Obtener las coordenadas de unos cuantos puntos que satisfagan la ecuación, es decir, una tabla en la que se le asignan valores a x y se obtiene y; sustituyendo x en la ecuación.

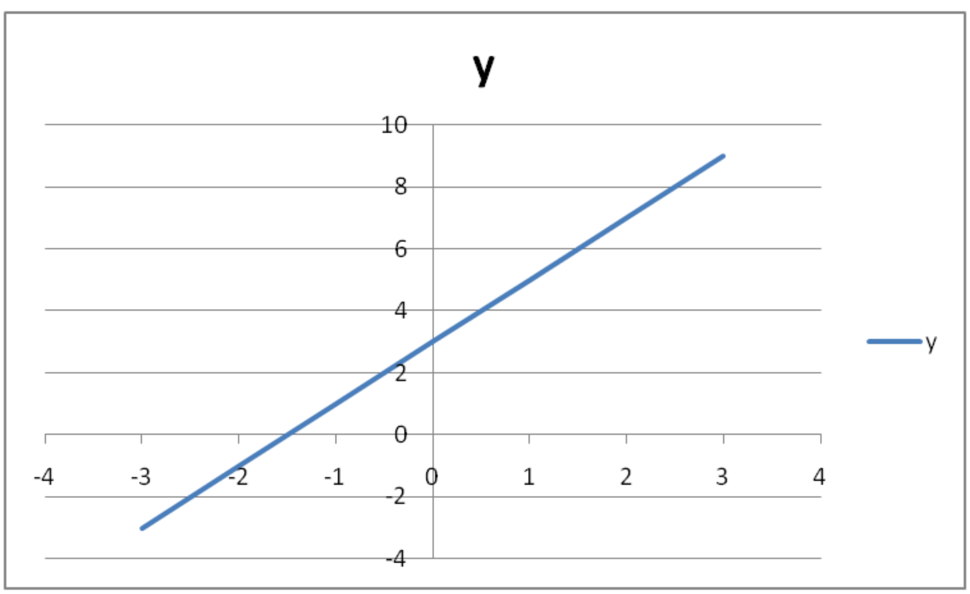
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2.- Construir la gráfica de esos puntos en el plano coordenado rectangular.

3.- Unir los puntos y de esta manera se obtiene la función a graficar.

EJEMPLO: Encuentre la grafica de la siguiente función $y = 2x - 3$

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9



2.4 FUNCIONES ALGEBRAICAS: FUNCIÓN POLINOMIAL, RACIONAL E IRRACIONAL.

FUNCION ALGEBRAICA. Es aquella en la que la dependencia puede expresarse con las operaciones algebraicas: suma y resta con un número limitado de términos, multiplicación con un número limitado de factores, división y potencia con exponente, ya sea fraccionario, positivo o negativo. Por ejemplo: $2x+5, ax+b, \frac{x+4}{3x-5}, ax^{\frac{2}{3}},..., etc.$

FUNCIÓN POLINOMIAL. Es toda función que se pueda expresar de la forma x → P(x) donde P es un polinomio en x, es decir, una suma finita de potencias de x multiplicadas por ciertos coeficientes. En particular, las:

FUNCIONES LINEALES. Son los polinomios de primer grado o de grado cero que se representa mediante una recta del tipo $y = mx + b$. Donde m es la pendiente, b es el punto de intersección con el eje y, es decir si x = 0 el punto de intersección con el eje y es B (0, b) Ejemplos de funciones lineales: $y = 3; y = 2x, y = 4 - 2x,..., etc$

FUNCIONES CUADRATICAS. Son las funciones de segundo grado que se representan mediante parábolas verticales del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Ejemplos: $y = x^2,\ y = x^2 + 2,\ y = 2x^2 + x,\ ..., etc$

FUNCIONES POLINOMICAS. Son funciones de grado superior a dos. Ejemplos: $y = x^3, y = x^4, y = x^3 - x$

FUNCIONES RACIONALES. Son aquellos que no requieren extracción de raíz, como, por ejemplo: $ax, 2x^2, 4x^{-3}$.

FUNCIONES IRRACIONALES O RAÍZ. Son las funciones en que el exponente es una fracción irreducible. Por ejemplo: $\sqrt{x}, x^{\frac{2}{3}}, \sqrt{x^2-5}$

2.5 FUNCIONES TRASCENDENTES: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y FUNCIONES EXPONENCIALES.

FUNCION TRASCENDENTE. Es una función que no puede ligarse a la variable independiente por medio de una de las cuatro operaciones algebraicas, efectuadas un número limitado de veces. Por ejemplo: $3^{2x}, \log x, \ln x, sen\, x, \tan^{-1} x,..., etc$

FUNCIÓN TRIGONOMETRICA. Es también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

FUNCIÓN EXPONENCIAL. Es aquella en la cual la variable independiente interviene como exponente; por ejemplo: a^x, e^x

EJERCICIO II. Dadas las siguientes funciones, dígase si son algebraicas o trascendentes, racionales o irracionales, explicitas o implícitas.

1.- $y = x^3 - 2x + 1$
2.- $y = 4\ sen\ x$
3.- $y = (x^3 - 4x^2 + 2)^2$
4.- $y = a^{2x-3}$
5.- $y = tan^3 6x$
6.- $x^2 + y^2 = 4$
7.- $y = \frac{2x^2+1}{x^2+x-2}$
8.- $y = 5x^{-4}$
9.- $y = \frac{x^2\sqrt{5}-9}{3x-4}$
10.- $y = x^x$
11.- $y = 8x^{-\frac{1}{2}}$
12.- $y = 8x$
13.- $y = x^3 \times \sqrt{2x}$
14.- $y = \frac{x+1}{1-x}$

INVESTIGAR. ENTREGAR UNA SINTESIS
2.6 Función definida por más de una regla de correspondencia, función valor absoluto.

2.7 OPERACIONES CON FUNCIONES: ADICIÓN, MULTIPLICACIÓN, COMPOSICIÓN.

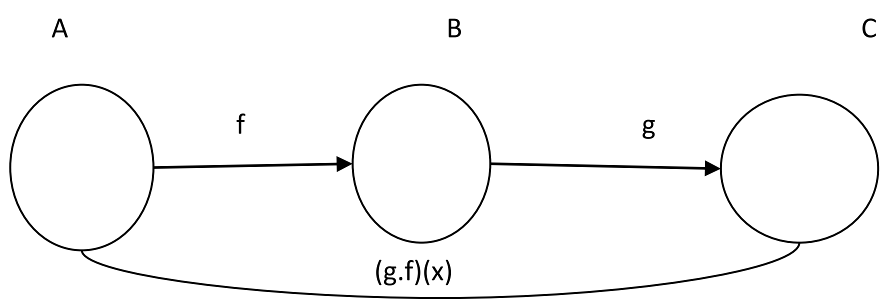
ALGEBRA DE FUNCIONES. Si f y g están definidos para todos los números reales, entonces es posible realizar operaciones numéricas como la suma, resta, multiplicación y división, con las respectivas funciones $f(x)\ y\ g(x)$. Estas operaciones están definidas en la siguiente ilustración:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad siendo\ g(x) \neq 0$$

De las funciones anteriores están todas y cada una de ellas en la interacción de sus dominios excepto para los valores donde g(x) debe excluirse del dominio de la función cociente.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. Es una operación de funciones que consiste en aplicar sucesivamente dos funciones en un orden determinado con lo cual se obtiene una tercera función.$g \cdot f: A \rightarrow C$ así obtenida se le llama la composición de la función f con la función g.

El símbolo $(g \cdot f)$ se lee "f compuesta con g", "f seguida de g". De donde si $x \in A$ entonces $f(x) \in B$ y $g(f(x) \in C)$



De lo anterior se tienen lo siguiente:

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x))$$
$$(f \cdot f)(x) = f(f(x))$$
$$(g \cdot g)(x) = g(g(x))$$
$$(g \cdot f)(x) = g(f(x))$$

2.8 FUNCIÓN INVERSA. FUNCIÓN LOGARÍTMICA, FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

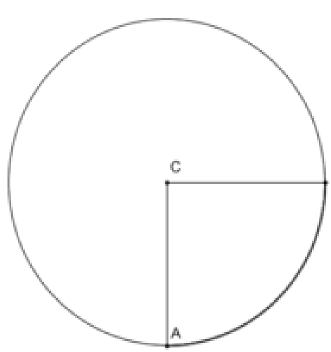
FUNCIONES INVERSAS. Son dos funciones tales que a todo punto de la gráfica de la primera función corresponde un punto de la gráfica de la segunda, de tal manera que la abscisa de cada punto de la primera es igual a la ordenada del punto correspondiente de la otra y viceversa; es decir, a todo punto de la primera curva corresponde, en la segunda, otro punto simétrico con respecto a la bisectriz del ángulo XOY.

FUNCIÓN LOGARITMICA. Es aquella que está afectada por un logaritmo; como: $y = \log_{10} x$.Puede decirse también que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. $y = a^x \quad y \quad y = \log_a x$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse **arco** a cualquier cantidad expresada en **radianes**; por eso las *funciones inversas se denominan con el prefijo arco*, $y = sen\, x$, y es igual al seno de x, la función inversa: $x = arc\, sen\, y$, x es el **arco** cuyo seno vale y, o también x es el arcoseno de y. Por ejemplo:

$$y = sen\, x \therefore x = arc\, sen\, y$$
$$y = cosx \therefore x = arc \cos y$$
$$y = \tan \therefore x = arc \tan y$$
$$y = ctg\, x \therefore x = arc\, ctg\, y$$
$$y = sec\, x \therefore x = arc\, sec\, y$$
$$y = csc\, x \therefore x = arc\, csc\, y$$

EL RADIÁN. Es la unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades. Representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio. Su símbolo es rad.



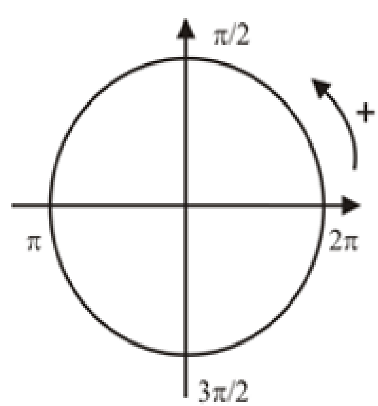


FIG. ARCO FIG. RADIANES

INVESTIGACION DEL TEMA. ENTREGAR SINTESIS
2.9 Funciones con dominio en los números naturales y recorrido en los números reales: las sucesiones infinitas. I

2.10 FUNCIÓN IMPLÍCITA.

FUNCIÓN IMPLÍCITA. Es una función de la variable independiente, cuando su dependencia con respecto a la variable independiente no se expresa en forma de ecuación ya resuelta (función explicita). Así, en $3x - 2y = 5$, y es función implícita de x; en la función $xy + x = x^3$, y es también función implícita de x.
FUNCIÓN EXPLICITA. Es una función de la variable independiente, cuando esta directamente indicadas las operaciones que deben efectuarse con dicha variable para obtener el valor o valores de la función, así, en $y = 2x - 3$, y es función explicita de x.

UNIDAD 3. LÍMITES Y CONTINUIDAD

3.1 Límite de una sucesión.

El número "a" recibe el nombre de límite de la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N = N(\varepsilon)$ tal, que

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ para } n > N$$

3.2 Límite de una función de variable real.

Se dice que la función $f(x) \to A$ cuando $x \to a$ (A y a son unos números), o que

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que

$|f(x) - A| < \varepsilon$ para $0 < |x - a| < \delta$

Análogamente

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Si $|f(x) - A| < \varepsilon$ para $|x| > N(\varepsilon)$

También se emplea la notación convencional

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Que indica, que $|f(x)| > E$ para $0 < |x - a| < \delta(E)$, donde E es un número positivo arbitrario.

3.3 Cálculo de límites.

LIMITES PARA FORMAS INDETERMINADAS.

FORMA INDETERMINADA. Es cuando la sustitución directa conduce a una expresión indefinida 0/0, por cuanto no podemos a partir de esa expresión calcular el límite.

$$Sustitución\ directa \begin{cases} = \dfrac{0}{0}\ se\ factoriza \\ = \dfrac{0}{\#} = 0 \\ \dfrac{\#}{0} = \infty\ \ No\ existe \\ \dfrac{\#}{\#} = \begin{cases} da\ entero \\ fraccionario \end{cases} \end{cases}$$

TÉCNICA DE CANCELACIÓN. Es cuando la sustitución directa nos conduce a la forma indeterminada. Se intenta evaluar el límite y uno se da cuenta que con está forma debe modificarse la fracción de tal manera que el nuevo denominador y/o numerador no tengan límite cero. Una manera de lograrlo es cancelando factores iguales. Esto se realiza factorizando las expresiones que son factorizables dependiendo del tipo de factorización que se presente en el problema a resolver.

TÉCNICA DE RACIONALIZACIÓN. Es cuando la sustitución directa nos conduce a la forma indeterminada. En este caso cambiamos la forma de la fracción racionalizando el numerador y/o denominador según corresponda. Esto consiste en completar la expresión como si se tratara de binomios conjugados; es decir completando con el conjugado de esta expresión cambiando el signo de la función, multiplicando y dividiendo por esta. Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=(x+1)^{\frac{2}{2}}=(x+1)^{1}=x+1$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

En los problemas, encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos de los casos, se necesita un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x+4}{4}=$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+9x+20}{x^2+2x-15}=$
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}=$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{6x-12}{6}=$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{6-5x-x^2}{x^2+7x-8}=$
$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x+4}=$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+2}{2}=$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=$
$\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x-6}{3}=$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}=$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{10x-5}{5}=$
$\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-4}=$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}=$	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-11x+24}{x^2-6x+9}=$
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}=$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=$
$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-10x+24}{x^2-3x-4}=$	$\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}=$
$\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-9x+14}{x-7}=$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=$	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3+64}=$	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=$

$\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^3+125}{x^2-25} =$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$ $\lim\limits_{x\to 6} \frac{x-6}{x^2-36} =$

PARTICIPACIÓN.

En los problemas, encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos de los casos, se necesita un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+2x-24}{x-4} =$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} =$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+7x+7}{x^2-4x-5} =$ $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{2x+4} =$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+2}{2} =$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} =$

TAREA.

En los problemas, encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos de los casos, se necesita un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-6}{3} =$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} =$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{10x-5}{5} =$

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-4} =$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{x+1} =$ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-11x+24}{x^2-6x+9} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4} =$ $\lim\limits_{x\to 6} \frac{x-2}{x+3}$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} =$

$\lim\limits_{t\to -1} \frac{t^2+7t+7}{t^2-4t-5} =$ $\lim\limits_{t\to 3} \frac{t^2-t-6}{t^2+2t-15} =$ $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} =$

$\lim\limits_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2+11y-26} =$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{x^2-2x+1} =$ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} =$ $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^3-64} =$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} =$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{a^2x-a^3} =$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5x+9}{x-1} =$

3.4 Propiedades de los límites

LÍMITE. Es una especie de cota que a veces puede ser alcanzable y otras no sólo alcanzable sino superable.

COTA. (Del lat. *quota*, t. f. de *quotus*, cuantos; cf. *coto*). *Mat.* Elemento de un conjunto que limita, inferior o superiormente, los elementos de la sucesión de un subconjunto.

NOTACION MATEMATICA DE LÍMITE. Se representa matemáticamente $\underset{x\to c}{lím}\ f(x)=?$

Qué se lee:” El límite de la función de x cuando x tiende a c es igual?”

TEOREMA “A”. LIMITES PARA FUNCIONES ALGEBRAICAS.

Sean b y c números reales, n un entero positivo, sean f, g funciones con los siguientes límites; que tienen límite cuando x tiende a c, son ciertas las siguientes propiedades:

1.- De la constante.

$$\underset{x\to c}{lím}\, b=b$$

Se lee: “El límite de la constante cuando x tiende a c es igual a la constante”.

2.- De la variable

$$\underset{x\to c}{lím}\, x=c$$

Se lee: “El límite de la variable cuando x tiende a c es igual a c”.

3.- De la variable elevada a la potencia

$$\underset{x\to c}{lím}\, x^n=c^n$$

Se lee: “El límite de la variable elevada a la potencia cuando x tiende a c es igual a c elevada a la potencia”

4.- Del múltiplo escalar (b x, bx^2,…,)

$$\underset{x\to c}{lím}\, bx^n=b\underset{x\to c}{lím}\, x^n$$

Se lee: “El límite del múltiplo escalar cuando x tiende a c es igual a la constante por el limite de la variable”.

5.- De la suma o diferencia

$$\underset{x\to c}{lím}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\underset{x\to c}{lím}\, f(x)\pm\underset{x\to c}{lím}\, g(x)$$

Se lee: “El límite de la suma o diferencia cuando x tiende a c es igual a al limite de cada término de la suma o diferencia”.

6.- Del producto o multiplicación

$$\underset{x\to c}{lím}\left[f(x).g(x)\right]=\left[\underset{x\to c}{lím}\, f(x)\right]\left[\underset{x\to c}{lím}\, g(x)\right]$$

Se lee:”El límite del producto o multiplicación cuando x tiende a c es igual al límite de cada factor del producto”.

7.- Del cociente o división.

$$\underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\underset{x\to c}{lím}\, f(x)}{\underset{x\to c}{lím}\, g(x)}$$

Se lee: “El límite de cociente o división cuando x tiende a c es igual al limite de dividendo y del divisor del cociente”

8.- De la potencia de una función

$$\underset{x\to c}{lím}\left[f(x)^n\right]=\left[\underset{x\to c}{lím}\, f(x)\right]^n$$

Se lee: “El límite de la potencia de una función cuando x tiende a c es igual a limite de la función cuando x tiende a c elevado a la potencia”.

3.5 Límites laterales.

Si $x < a$ y $x \to a$, se escribe convencionalmente $x \to a - 0$; análogamente, si $x > a$ y $x \to a$, se escribirá así: $x \to a + 0$ .Los números

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) \quad y \quad f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Se llama, respectivamente, *limite a la izquierda* de la función $f(x)$ en el punto a y *limite a la derecha* de la función $f(x)$ en el punto a (si es que dichos números existen).

Para que exista el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$f(a-0) = f(a+0)$$

3.6 Límites infinitos y límites al infinito.

Definición de límites infinitos

Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c, salvo, posiblemente, en el propio c. La expresión

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que $0 < |x-c| < \delta$. Para definir el límite infinito por la izquierda, basta sustituir $0 < |x-c| < \delta$ por $c - \delta < x < c$. Y para definir el límite infinito por la derecha, basta sustituir $0 < |x-c| < \delta$ por $c < x < c + \delta$

PROPIEDADES DE LOS LIMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y sean $f \ y \ g$ funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x) = L$$

1. Suma o diferencia $\qquad \lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto $\qquad \lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \infty$
3. Cociente: $\qquad \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son validas para límites laterales y para funciones cuyo límite cuando x tiende a c es -∞

Para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

1. Divídase todos los términos del numerador y del denominador entre una potencia de la variable tal que, el dividendo o en ambos a la vez, el primer término sea independiente de ella
2. Atribúyase a la variable el valor particular indicado en el problema; es decir se divide el numerador y el denominador por la mayor potencia de la variable que entre en la fracción.

Ciertos límites particulares que se presentan frecuentemente se dan a continuación. La constante c no es cero.

Escrito en forma de limite	forma abreviada, frecuentemente usado
$\lim_{v\to 0} \frac{c}{v} = \infty$	$\frac{c}{0} = \infty$
$\lim_{v\to\infty} cv = \infty$	$c \cdot \infty = \infty$
$\lim_{v\to\infty} \frac{v}{c} = \infty$	$\frac{\infty}{c} = \infty$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{c}{v} = 0 \qquad \frac{c}{\infty} = 0$$
$$\lim_{v\to\infty} (c \pm v) = \infty \qquad c \pm \infty = \pm\infty$$
$$\lim_{v\to\infty} e^{v} = \infty \qquad e^{\infty} = \infty$$
$$\lim_{v\to\infty} e^{-v} = 0 \qquad e^{-\infty} = 0$$

3.7 Asíntotas.

ASÍNTOTAS. Es una recta vertical a la gráfica de f

DEFINICION DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infito(o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la grafica de f

TEOREMA: ASINTOTAS VERTICALES

Sean $f \; y \; g$ funciones continuas en un intervalo abierto que contiene c. Si $f(c) \neq 0, g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ del intervalo, entonces la grafica de la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ posee una asíntota vertical en $x = c$

Hallar las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

3.8 Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo.

FUNCION CONTINUA. Es cuando una función es continua en $x = c$; es decir que no hay interrupción de la gráfica en f (c), esto es que no tiene en “c” agüeros, saltos no aberturas

La continuidad en $x = c$ puede destruirse por cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en $x = c$
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe, pero no es iguala $f(c)$

DEFINICIOM XS CONTINUIDAD

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Decimos que una función f es **continua en c** si se satisfacen las tres condiciones siguientes.

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Decimos que una función es **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función que es continua en toda la recta real $(-\infty, \infty)$ se llama **continua en todas partes**.

3.9 Tipos de discontinuidades.

UN IDAD 4. DERIVADAS

4.1 Conceptos de incremento y de razón de cambio. La derivada de una función.

INCREMENTO DE UNA VARIABLE Y DE RAZON DE CAMBIO.

El incremento Δx de una variable x es el cambio en x cuando crece o decrece desde un valor $x = x_0$ hasta otro valor $x = x_1$ en su dominio. Así $\Delta x = x_1 - x_0$ y podemos escribir $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Si la variable x experimenta un incremento Δx a partir de $x = x_0$ (esto es, si x cambia de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$) y una función cambia por tanto en un incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir de $y = f(x_0)$, el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$$

Se llama la razón media de cambio de la función en el intervalo entre $x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$

LA DERIVADA DE UNA FUNCION $y = f(x)$ con respecto a x en el punto $x = x_0$ se define como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Supuesto que existe el límite. Este límite se llama también razón instantánea de cambio (o simplemente, razón de cambio) de y con respecto a x en $x = x_0$

Al calcular la derivada es habitual suprimir el subíndice 0 y obtener la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x se indica por cualquiera de los símbolos

$$\frac{d}{dx}\, y \quad \frac{dy}{dx} \qquad D_x y \qquad y' \qquad f'(x) \qquad \frac{d}{dx}(f(x))$$

4.2 La interpretación geométrica de la derivada.

De la figura 4.1 vemos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la secante que una un punto arbitrario pero fijo $P(x, y)$ y un punto próximo $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la curva. Cuando $\Delta x \to 0$, P queda fijo mientras que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, y la recta PQ gira alrededor de P hacia su posición límite, la recta tangente PT a la curva P. Así pues, $\frac{dy}{dx}$ da la pendiente de la tangente en P a la curva $y = f(x)$

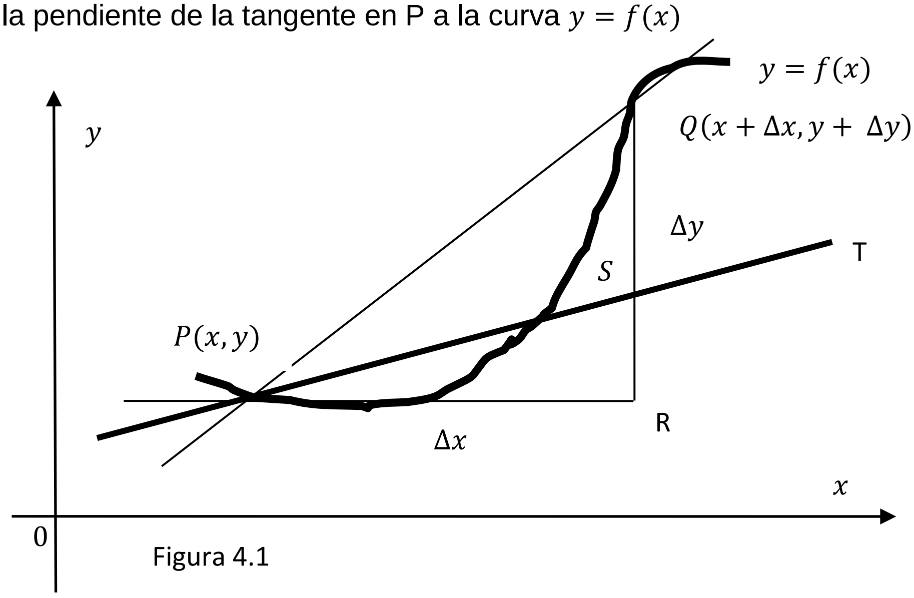


Figura 4.1

4.3 Concepto de diferencial. Interpretación geométrica de las diferenciales.

CONCEPTO DE DIFERENCIAL

Si $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ para un valor particular de x, y Δx es un incremento de x, arbitrariamente elegido, la diferencial de $f(x)$, que se representa por el símbolo $df(x)$, se define por la igualdad.

(A) $$df(x) = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$ y (A) se reduce a $dx = \Delta x$

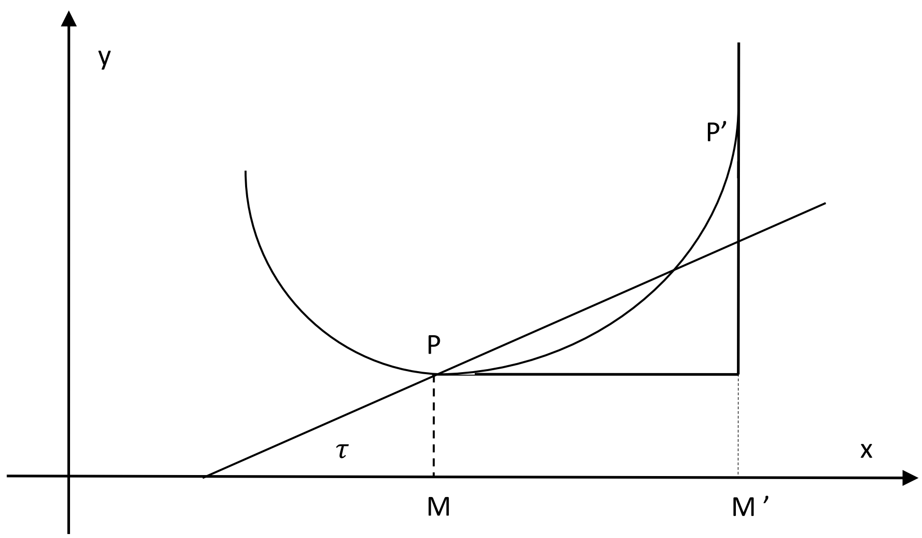
Así, cuando x es la variable independiente, la diferencial de $x(= dx)$ es idéntica a Δx. Por tanto, si $y = f(x)$, (A) puede, en general, escribirse en la forma

(B) $$dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

LA **DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN**. Es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

INTEPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL

Construya la curva $y = f(x)$ (Figura 4.2)



Sea $f'(x)$ el valor de la derivada en P. Tomemos $dx = PQ$. Entonces

$$dy = f'(x)dx = tg\ \tau \cdot PQ = \frac{QT}{PQ} \cdot PQ = QT$$

Luego dy, o sea $df(x)$, es el incremento $(= QT)$ de la ordenada de la tangente, correspondiente a dx.

Esto da la siguiente interpretación de la derivada como fracción:

Si se representa por dx un incremento arbitrariamente elegido de la variable independiente x para un punto $P(x, y)$ en la curva $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = tg\ \tau$$

dy Representa el incremento correspondiente a la ordenada de la tangente de P

4.4 Propiedades de la derivada.

Hallar la derivada de una función aplicando la *definición de derivada* es un proceso largo y la mayor de las veces bastante tediosa. Afortunadamente existen *varias propiedades en la derivación* de funciones que los matemáticos han descubierto y establecido como teoremas. Algunos de estos teoremas son gene rales, aplicables a cualquier función, y otros sólo se aplican a funciones particulares. A continuación se enuncian algunos de los teoremas más importantes (se nombran enumerándolos consecutivamente para facilitar una futura referencia a ellos):

Nota: se supone, obviamente, que las funciones a las que hacen referencia los teoremas son diferenciables, esto es, que tienen derivada.

Teorema D1:

Si $y = c, c$ es una constante

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) \quad o \quad D_x y = D_x(c)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad o \quad D_x y = 0$$

En palabras: "*la derivada de la función constante es cero”*.

Teorema D2:

Si $y = x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} \quad o \quad D_x y = D_x(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad o \quad D_x y = 1$$

En palabras: "*la derivada de la función identidad es uno”*.

Teorema D3:

Si $y = x^n, n \in Z$ (n es cualquier número racional)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) \quad o \quad D_x y = D_x(x^n)$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad o \quad D_x y = nx^{n-1}$$

Corolario: Como $\sqrt[n]{x^m} \Leftrightarrow x^{\frac{m}{n}}$, entonces

Si $y = \sqrt[n]{x^m}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) \qquad D_x y = D_x(x^{\frac{m}{n}})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-\frac{n}{n}} \qquad D_x y = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-\frac{n}{n}}$$

En palabras: "*para hallar la derivada de la función potencia se multiplica la función por un coeficiente igual al exponente y el exponente se disminuye en la unidad”*.

.**Teorema D4:**
Si $y = c \cdot f(x), c$ es una constante,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cv) \qquad o \qquad D_x y = D_x[c \cdot f(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}(v) \qquad o \qquad D_x y = c \cdot D_x[f(x)]$$

En palabras: "*la derivada de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función*".

.**Teorema D5:**
Si $\boldsymbol{y = u \pm v \pm \cdots \pm z} \qquad \boldsymbol{o} \qquad \boldsymbol{y = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)}.$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\boldsymbol{u \pm v \pm \cdots \pm z}) \qquad \boldsymbol{o} \qquad \boldsymbol{D_x\, y = D_x(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v) \pm \cdots \pm \frac{d}{dx}(z) \quad o \quad \boldsymbol{D_x y = D_x f_1(x) \pm D_x f_2(x) \pm \cdots \pm D_x f_n}(x)$$

En palabras: "*la derivada de la suma de un número finito, n, de funciones (términos), positivas o negativas, es igual a la suma de las derivadas de cada función y con su respectivo signo*".

.**Teorema D6:**
Si $\boldsymbol{y = uv} \qquad \boldsymbol{o} \qquad \boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) \quad o \qquad D_x y = D_x\big(\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}\big)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad o \qquad D_x\big(\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}\big) = \boldsymbol{f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)}$$

En palabras: "*la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera*".

.**Teorema D7:**
Si $\boldsymbol{y = \frac{u}{v}, v \neq 0} \qquad \boldsymbol{o} \qquad \boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)}}\ ,\ \boldsymbol{g(x) \neq 0}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \qquad o \qquad D_x y = D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad o \qquad D_x y = \frac{g(x) \cdot D_x\,(f(x) - f(x) \cdot D_x(g(x))}{(g(x))^2}}$$

En palabras: "*la derivada del cociente de dos funciones es igual a una fracción cuyo denominador es el cuadrado de la función del dividendo y cuyo numerador es la diferencia entre la función del dividendo por la derivada de la función del divisor y la función del divisor por la derivada de la función del dividendo*".

.En los ejercicios halle la derivada de la función dada aplicando los teoremas

$y = 7x - 5$ $solución$: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x - 5)$ D5 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x) - \cancelto{0}{\frac{d}{dx}(5)}$ $\frac{dy}{dx} = 7\frac{dx}{dx}$ D2 $\frac{dy}{dx} = 7(1)$ $\frac{dy}{dx} = 7$	$y = 3x^4 - 5x^2 + 1$ $solución$: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^2 + 1)$ D5 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(5x^2) + \frac{d}{dx}(1)$ D4, D1 $\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(x^4) - 5\frac{d}{dx}(x^2) + \cancelto{0}{\frac{d}{dx}(1)}$ $\frac{dy}{dx} = 3(4x^{4-1}) - 5(2x^{2-1})$ $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 10x$
$y = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$ se hace trabajo algebraico $y = x^2 + 3x + x^{-2}$ $solución$: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + x^{-2})$ $D5$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(3x) + \frac{d}{dx}(x^{-2})$ $D3, D4$ $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} + 3\frac{dx}{dx} + (-2x^{-2-1})$ $D1$ $\frac{dy}{dx} = 2x + 3(1) - 2x^{-3}$ $\frac{dy}{dx} = 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$	$y = (2x^2 + 5)(4x - 1)$ $solución$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}[(2x^2 + 5)(4x - 1)]$ D $\frac{dy}{dx} = (2x^2 + 5)\frac{dy}{dx}(4x - 1) + (4x - 1)\frac{d}{dx}(2x^2 + 5)$ $\frac{dy}{dx} = (2x^2 + 5)(4 - 0) + (4x - 1)(4x + 0)$ $\frac{dy}{dx} = 8x^2 + 20 + 16x^2 - 4x$ $\frac{dy}{dx} = 24x^2 - 4x + 16$
$y = 3\sqrt[7]{x^2}$ $1 = \frac{7}{7}$ $y = 3x^{\frac{2}{7}}$ $solución$: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^{\frac{2}{7}})$ D4 $\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{7}})$ C3 $\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-\frac{7}{7}}\right)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{7}x^{-\frac{5}{7}}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{7x^{\frac{5}{7}}}$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{7\sqrt[7]{x^5}}$	$y = \frac{x}{x - 1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x - 1}\right)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 1)\frac{dx}{dx} - x\frac{d}{dx}(x - 1)}{(x - 1)^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 1)(1) - x(1 - 0)}{(x - 1)^2}$ Multiplicar los productos y reducir términos semejantes $\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{(x - 1)^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x - 1)^2}$

Teorema D8:

Si $y = v^n$ o $y = (f(x))^n$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v^n)$ o $D_x y = D_x(f(x)^n)$

$\frac{dy}{dx} = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = n(f(x))^{n-1} \; D_x(f(x))$

En palabras: "La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad por la derivada de la función".

REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES TRASCENDENTES.

Ahora consideremos funciones como $sen\, 2x, 3^x, \log x^2, e^x$ que se llaman funciones trascendentes para distinguirlas de las funciones algebraicas que hemos estudiado hasta aquí.

Las siguientes fórmulas, que se agrupan aquí abarcan fórmulas para derivar que se emplearan.

Teorema D9

Si $y = \ln v$ o $y = \ln v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ln\, v)$ o $D_x\, y = D_x(ln\, v)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ o $D_x y = \frac{1}{v} D_x(v)$

En palabras: "La derivada del logaritmo natural de una función es igual al reciproco de la función por la derivada de la función".

Teorema D10

Si $y = \log\, v$ o $y = \log\, v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(log\, v)$ o $D_x\, y = D_x(log\, v)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{log\, e}{v}\frac{dv}{dx}$ o $D_x y = \frac{\log\, e}{v} D_x(v)$

En palabras: **"La derivada del logaritmo común de una función** *es igual al logaritmo "e" dividido por la función por la derivada de la función".*

Teorema D11

Si $y = a^v$ o $y = a^v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^v)$ o $D_x\, y = D_x(a^v)$

$\frac{dy}{dx} = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = a^v \ln a\, D_x(v)$

En palabras:"La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto de la constante elevada al exponente variable por el logaritmo natural de la constante por la derivada del exponente".

Teorema D12

Si $y = e^v$ o $y = e^v$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(e^v)$ o $D_x\, y = D_x(e^v)$

$\dfrac{dy}{dx} = e^v \dfrac{dv}{dx}$ o $D_x y = e^v D_x(v)$

En palabras: "La derivada de la constante "e" elevada a un exponente variable es igual al producto de la constante "e"elevada al exponente variable por la derivada del exponente variable".

Teorema D13

Si $y = u^v$ o $y = u^v$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(u^v)$ o $D_x\, y = D_x(u^v)$

$\dfrac{dy}{dx} = vu^{v-1}\ \dfrac{du}{dx} + \ln u u^v \dfrac{dv}{dx}$ o $D_x y = \ vu^{v-1}\ D_x\,(u) + \ln u u^v\, D_x(v)$

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u\, u^v \frac{dv}{dx}$$

En palabras: "La derivada de una función con exponente variable es igual a la función v por u elevada a un exponente v menos uno por la derivada de u mas el logaritmo natural de u por u elevado a la v por la derivada de v".

Teorema D14.

Si $y = sen\ v$ o $y = sen\ v$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(sen\ v)$ o $D_x\, y = D_x(sen\ v)$

$\dfrac{dy}{dx} = \cos v\ \dfrac{dv}{dx}$ o $D_x y = \cos v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función seno de una función es igual al producto de la función coseno de la función por la derivada de la función".

Teorema D15.

Si $y = cos\ v$ o $y = cos\ v$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(cos\ v)$ o $D_x\, y = D_x(cos\ v)$

$\dfrac{dy}{dx} = -sen\ v\dfrac{dv}{dx}$ o $D_x y = -sen\ vD_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función coseno de una función es igual a menos el producto de la función seno de la función por la derivada de la función".

Teorema D16.

Si $y = tan\ v$ o $y = tan\ v$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(tan\ v)$ o $D_x\, y = D_x(tan\ v)$

$\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 v\ \dfrac{dv}{dx}$ o $D_x y = \sec^2 v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función tangente de una función es igual al producto de la función secante cuadrada de la función por la derivada de la función".

Teorema D17.

Si $y = ctg\ v$ o $y = ctg\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ctg\ v)$ o $D_x\, y = D_x(ctg\ v)$

$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 v\, \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = -\csc^2 v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función cotangente de una función es igual a menos el producto de la función cosecante cuadrada de la función por la derivada de la función".

Teorema D18.

Si $y = sec\ v$ o $y = sec\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sec\ v)$ o $D_x\, y = D_x(sec\ v)$

$\frac{dy}{dx} = \sec v \tan v\, \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = \sec v\ tan\ v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función secante de la función es igual al producto de las funciones secante de la función por la tangente de la función por la derivada de la función".

Teorema D19.

Si $y = csc\ v$ o $y = \csc v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(csc\ v)$ o $D_x\, y = D_x(csc\ v)$

$\frac{dy}{dx} = -\csc v\ ctg\ v\, \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = -\csc v\ ctg\ v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función cosecante de la función es igual a menos el producto de las funciones cosecante de la función por la cotangente de la función por la derivada de la función".

Teorema D20

Si $y = vers\ v$ o $y = vers\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vers\ v\ )$ o $D_x\, y = D_x(vers\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = sen\ v \frac{dv}{dx}$ o $D_x y = sen\ v\, D_x\,(v)$

En palabras: "La derivada de la función vers es igual al seno de la función por la derivada de la función"

Teorema D21

Si $y = arc\ sen\ v$ o $y = arc\ sen\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ sen\ v\ )$ o $D_x\, y = D_x(arc\ sen\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}$ o $D_x y = \frac{D_x(v)}{\sqrt{1 - v^2}}$

En palabras: "La derivada de la función arco seno de la función es igual a derivada de la función entre la raíz cuadrada de uno menos la función elevada al cuadrado".

Teorema D22

Si $y = arc\ cos\ v$ o $y = arc\ cos\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ cos\ v\ )$ o $D_x\ y = D_x(arc\ cos\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$ o $D_x y = \frac{D_x(v)}{\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La derivada de la función arco coseno de la función es igual a menos la derivada de la función entre la raíz cuadrada de uno menos la función elevada al cuadrado".

Teorema D23

Si $y = arc\ tan\ v$ o $y = arc\ tan\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ tan\ v\ )$ o $D_x\ y = D_x(arc\ tan\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{1-v^2}$ o $D_x y = \frac{D_x(v)}{1-v^2}$

En palabras: "La derivada de la función arco tangente de la función es igual a la derivada de la función entre uno más la función elevada al cuadrado".

Teorema D24

Si $y = arc\ ctg\ v$ o $y = arc\ ctg\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ ctg\ v\ )$ o $D_x\ y = D_x(arc\ ctg\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1-v^2}$ o $D_x y = -\frac{D_x(v)}{1-v^2}$

En palabras: "La derivada de la función arco cotangente de la función es igual menos la derivada de la función entre uno más la función elevada al cuadrado".

Teorema D25

Si $y = arc\ sec\ v$ o $y = arc\ sec\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ sec\ v\ )$ o $D_x\ y = D_x(arc\ sec\ v\ )$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{1-v^2}}$ o $D_x y = \frac{D_x(v)}{v\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La derivada de la función arco cotangente de la función es igual la derivada de la función entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la función elevada al cuadrado menos uno".

Teorema D26

Si $y = arc\ csc\ v$ o $y = arc\ csc\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ csc\ v)$ o $D_x\, y = D_x(arc\ csc\ v)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{1-v^2}}$ o $D_x y = -\frac{D_x(v)}{v\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La derivada de la función arco cotangente de la función es igual a menos la derivada de la función entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la función elevada al cuadrado menos uno".

Teorema D27

Si $y = arc\ vers\ v$ o $y = arc\ vers\ v$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(arc\ vers\ v)$ o $D_x\, y = D_x(arc\ vers\ v)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v-v^2}}$ o $D_x y = \frac{D_x(v)}{v\sqrt{2v-v^2}}$

En palabras: "La derivada de la función arco vers de la función es igual la derivada de la función entre la raíz cuadrada de la función por el doble producto de la función menos el cuadrado de la función".

4.5 Regla de la cadena.

Imagine que trata de encontrar la derivada de

$$f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Para empezar, tendría que multiplicar entre si 60 factores cuadráticos $2x^2 - 4x + 1$ y derivar después el polinomio resultante de grado 120.

Por fortuna, hay un mejor modo de proceder. Después de que haya aprendido la *regla de la cadena,* será capaz de escribir la respuesta

$$f'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

Tan rápido como pueda mover el lápiz. En efecto, la regla de la cadena es tan importante que usted rara vez derivara cualquier función sin usarla. Pero para establecer como propiedad la regla, necesitamos introducirnos un ligero refinamiento en nuestra notación $\frac{dy}{dx}$.

La notación $\frac{dy}{dx}$. El símbolo $\frac{dy}{dx}$ se debe leer "la derivada de y con respecto a x"; mide que tan rápido cambia y con respecto a x. Si $y = 3s^2x^2$ debemos escribir

$$\frac{dy}{dx} = 6s^2x \qquad y \qquad \frac{dy}{ds} = 6sx^2$$

En el primer caso, s se trata como una constante y x como una variable, en el segundo caso, x es una constante y s es la variable.

Es importante el siguiente ejemplo. Supóngase $y = u^{60}$ y $u = 2x^2 - 4x + 1$. Entonces $\frac{dy}{du} = 60u^{59}$ y $\frac{du}{dx} = 4x - 4$. Pero adviértase que al sustituir $u = 2x^2 - 4x + 1$ en $y = u^{60}$, se obtiene

$$y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Así que tiene sentido preguntar por $\frac{dy}{dx}$. ¿Cuál es $\frac{dy}{du}$ y como se relaciona con $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$? Con más generalidad, ¿Cómo derivar una función compuesta?

REGLA DE LA CADENA Es una fórmula para la derivada de la composición de dos funciones. Tiene aplicaciones en el cálculo algebraico de derivadas cuando existe composición de funciones.

TEOREMA DE LA REGLA DE LA CADENA

"Sea $y = f(u)$ y $u = g(x)$ que determina una función compuesta $y = f\big(g(x)\big) = (f°g)(x)$. Si g es diferenciable en x y f es diferenciable en $u = g(x)$, entonces $f°g$ es derivable en xy.

$$(f°g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Esto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Quizás esta manera ayude a recordar:

Tornadizo de la izquierda

Variable de en medio

Variable de la derecha

$y = f(u)$ $\quad y \quad$ $u = g(x)$

Derivada de la variable de la izquierda con respecto a la variable de en medio

Derivada de la variable de en medio con respecto a la variable de la derecha

Derivada de la variable de la izquierda con la derecha

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad \frac{dy}{du} \quad \frac{du}{dx}$$

Descripción de la regla

En términos intuitivos, si una variable *y*, depende de una segunda variable *u*, que a la vez depende de una tercera variable *x*; entonces, la razón de cambio de *y* con respecto a *x* puede ser computado como el producto de la razón de cambio de *y* con respecto a *u* multiplicado por la razón de cambio de *u* con respecto a *x*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \circ \frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena compuesta. Suponga que

$$y = f(u) \quad y \quad u = g \quad y \quad v = h(x)$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

4.6 Fórmulas de derivación y fórmulas de diferenciación.

Las fórmulas de la derivada se vieron en el punto 4.4 en este punto solo hablaremos de las fórmulas de las diferenciales.

La definición de la diferencial de una función

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente. Se representa matemáticamente como:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Fórmulas para hallar las diferenciales de funciones

Puesto que la diferencial de una función es el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, se sigue inmediatamente que las fórmulas para hallar las diferenciales son las mismas que las dadas para obtener las derivadas, con solo multiplicar cada una de ellas por dx

En consecuencia, las fórmulas para diferenciación son:
Teorema E1
Si $y = c$
$\Rightarrow d(y) = d(c) \therefore\ dy = 0$

En palabras: "La diferencial de una función constante es igual a cero".
Teorema E2
Si $y = x$
$\Rightarrow d(y) = d(x) \therefore dy = dx$

En palabras: "*la diferencial de la función identidad es igual a la diferencial de la función identidad*".
.**Teorema E3:**
Si $y = x^n, n \in Z$ (n es cualquier número racional)
$\Rightarrow\ d(y) = d(x^n) \therefore dy = nx^{n-1}\,dx$

Corolario: Como $\sqrt[n]{x^m} \Leftrightarrow x^{\frac{m}{n}}$, entonces

Si $y = \sqrt[n]{x^m}$
$\Rightarrow d(y) = d\left(x^{\frac{m}{n}}\right) \therefore dy = x^{\frac{m}{n}-1}\,dx$
En palabras: "*para hallar la diferencial de la función potencia se multiplica la función por un coeficiente igual al exponente y el exponente se disminuye en la unidad por la diferencial de la función*".
.**Teorema E4:**
Si $y = c \cdot f(x), c$ es una constante,
$\Rightarrow\ d(y) = d(cv) \therefore dy = c\,d(v)$

En palabras: "*la diferencial de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la diferencial de la función*".

.**Teorema E5:**

Si $\boldsymbol{y = u \pm v \pm \cdots \pm z}$

$$\Rightarrow d(y) = d(\boldsymbol{u \pm v \pm \cdots \pm z}) \therefore dy = d(u) \pm d(v) \pm \cdots \pm d(z)$$

En palabras: "*la diferencial de la suma de un número finito, n, de funciones (términos), positivas o negativas, es igual a la suma de las diferenciales de cada función y con su respectivo signo*".

.**Teorema E6:**

Si $\boldsymbol{y = uv}$

$\Rightarrow d(y) = d(uv) \quad \therefore \quad dy = udv + vdu$

En palabras: "*la diferencial del producto de dos funciones es igual a la primera función por la diferencial de la segunda más la segunda función por la diferencial de la primera*".

.**Teorema E7:**

Si $\boldsymbol{y = \frac{u}{v}, v \neq 0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{d(y) = d\left(\frac{u}{v}\right) \therefore dy = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

En palabras: "*la diferencial del cociente de dos funciones es igual a una fracción cuyo denominador es el cuadrado de la función del dividendo y cuyo numerador es la diferencia entre la función del dividendo por la diferencial de la función del divisor y la función del divisor por la diferencial de la función del dividendo*".

Teorema E8:

Si $y = v^n \quad \Rightarrow d(y) = d(v^n) \quad \therefore \quad dy = nv^{n-1}dv$

En palabras: "La diferencial de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad por la diferencial de la función".

Teorema E9

Si $\quad y = \ln v \quad \Rightarrow d(y) = d(ln\, v) \quad \therefore dy = \frac{1}{v}dv$

En palabras: "La diferencial del logaritmo natural de una función es igual al reciproco de la función por la diferencial de la función".

Teorema E10

Si $\quad y = \log\, v \qquad \Rightarrow d(y) = d(log\, v) \qquad \therefore \qquad dy = \frac{log\, e}{v}dv$

En palabras: **"La *diferencial del logaritmo común de una función*** *es igual al logaritmo "e" dividido por la función por la diferencial de la función".*

Teorema E11

Si $\quad y = a^v \qquad \Rightarrow d(y) = d(a^v) \qquad \therefore \qquad dy = a^v \ln a\, dv$

En palabras: "La diferencial de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto de la constante elevada al exponente variable por el logaritmo natural de la constante por la diferencial del exponente".

Teorema E12

Si $\quad y = e^v \Rightarrow d(y) = d(e^v) \quad \therefore \quad dy = e^v dv$

En palabras: "La diferencial de la constante "e" elevada a un exponente variable es igual al producto de la constante "e" elevada al exponente variable por la diferencial del exponente variable".

Teorema E13

Si $y = u^v \quad \Rightarrow dy = d(u^v) \quad \therefore \quad dy = vu^{v-1}\, du + \ln u u^v\, dv$

En palabras: "La diferencial de una función con exponente variable es igual a la función v por u elevada a un exponente v menos uno por la diferencial de u más el logaritmo natural de u por u elevado a la v por la diferencial de v".

Teorema E14.

Si $y = sen\, v \quad \Rightarrow dy = d(sen\, v) \quad \therefore \quad dy = \cos v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función seno de una función es igual al producto de la función coseno de la función por la diferencial de la función".

Teorema E15.

Si $y = cos\, v \quad \Rightarrow dy = d(cos\, v) \quad \therefore \quad dy = -sen\, v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función coseno de una función es igual a menos el producto de la función seno de la función por la diferencial de la función".

Teorema E16.

Si $y = tan\, v \quad \Rightarrow dy = d(tan\, v) \quad \therefore \quad dy = \sec^2 v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función tangente de una función es igual al producto de la función secante cuadrada de la función por la diferencial de la función".

Teorema E17.

Si $y = ctg\, v \quad \Rightarrow dy = d(ctg\, v) \quad \therefore \quad dy = -\csc^2 v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función cotangente de una función es igual a menos el producto de la función cosecante cuadrada de la función por la diferencial de la función".

Teorema E18.

Si $y = sec\, v \quad \Rightarrow dy = d(sec\, v) \quad \therefore \quad dy = \sec v \tan v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función secante de la función es igual al producto de las funciones secante de la función por la tangente de la función por la diferencial de la función".

Teorema E19.

Si $y = csc\, v \;\Rightarrow dy = d(csc\, v) \;\therefore\; dy = -\csc v\; ctg\, v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función cosecante de la función es igual a menos el producto de las funciones cosecante de la función por la cotangente de la función por la diferencial de la función".

Teorema E20

Si $y = vers\, v \quad \Rightarrow dy = d(vers\, v\,) \;\therefore\; dy = sen\, v\, dv$

En palabras: "La diferencial de la función vers es igual al seno de la función por la diferencial de la función"

Teorema E21

Si $y = arc\, sen\, v \quad \Rightarrow dy = d(arc\, sen\, v\,) \;\therefore\quad dy = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La diferencial de la función arco seno de la función es igual a diferencial de la función entre la raíz cuadrada de uno menos la función elevada al cuadrado".

Teorema E22

Si $y = arc\ cos\ v \quad \Rightarrow dy = d(arc\ cos\ v\ ) \quad \therefore \quad dy = -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La diferencial de la función arco coseno de la función es igual a menos la diferencia de la función entre la raíz cuadrada de uno menos la función elevada al cuadrado".

Teorema E23

Si $y = arc\ tan\ v \quad \Rightarrow dy = d(arc\ tan\ v\ ) \quad \therefore \quad dy = \frac{dv}{1-v^2}$

En palabras: "La diferencial de la función arco tangente de la función es igual a la diferencial de la función entre uno más la función elevada al cuadrado".

Teorema E24

Si $y = arc\ ctg\ v \quad \Rightarrow \quad dy = d(arc\ ctg\ v\ ) \quad \therefore \quad dy = -\frac{dv}{1-v^2}$

En palabras: "La diferencial de la función arco cotangente de la función es igual menos la diferencial de la función entre uno más la función elevada al cuadrado".

Teorema E25

Si $y = arc\ sec\ v \ \Rightarrow dy = d(arc\ sec\ v\ ) \quad \therefore dy = \frac{dv}{v\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La diferencial de la función arco cotangente de la función es igual la diferencial de la función entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la función elevada al cuadrado menos uno".

Teorema E26

Si $y = arc\ csc\ v \quad \Rightarrow dy = d(arc\ csc\ v\ ) \quad \therefore \quad dy = -\frac{dv}{v\sqrt{1-v^2}}$

En palabras: "La diferencial de la función arco cotangente de la función es igual a menos la diferencial de la función entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la función elevada al cuadrado menos uno".

Teorema E27

Si $y = arc\ vers\ v \quad \Rightarrow dy = d(arc\ vers\ v\ ) \quad \therefore dy = \frac{dv}{\sqrt{2v-v^2}}$

En palabras: "La diferencial de la función arco vers de la función es igual la diferencial de la función entre la raíz cuadrada de la función por el doble producto de la función menos el cuadrado de la función".

.4.7 Derivadas de orden superior y regla L´Hôpital.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x y llamemos a su derivada la primera derivada de la función. Si la primera derivada es diferenciable, su derivada se llama la *segunda derivada* de la función original y se denota por algunos de los símbolos $\frac{d^2y}{dx^2}, y''o\ f''(x)$. A su vez, la derivada de la segunda derivada se llama la *tercera derivada* de la función y se denota por $\frac{d^3y}{dx^3}, y'''o\ f'''(x)$. Y lo mismo para la cuarta, quinta, etc.

Nota: la derivada de un cierto orden en un punto puede existir sólo cuando la función y todas sus derivadas de orden inferiores son diferenciables en ese punto.

Hallar la segunda derivada de las siguientes funciones

$$y = 2x^2 - 3x - 2$$
$$y' = 4x - 3$$
$$y'' = 4$$

$$y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$$
$$y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$
$$y'' = \frac{4}{x^3} - \frac{18}{x^4}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$
$$y' = x - 2$$
$$y'' = 1$$

REGLA DE L´HOSPITAL

Sea a un número y $f(x), g(x)$ son funciones diferenciables, con $g(x) \neq 0$ para todo x en algún intervalo $0 < |x - a| < \delta$, y si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces, cuando $\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ existe o es infinito

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f´(x)}{\lim_{x\to a} g´(x)}$$

4.8 Derivada de funciones implícitas.

Una ecuación $f(x, y) = 0$, sobre los rangos tal vez restringidos de la variable, se dice que define a y implícitamente como función de x.

La derivada de funciones implícitas puede obtenerse por uno de los procedimientos siguientes:

1. Despejar y, si es posible, y derivar respecto a x. Excepto para ecuaciones muy sencillas, este procedimiento es poco recomendable.
2. Pensando en y como función de x, derivar ambos miembros de la función dada respecto a x y despejar en la ecuación resultante y’. este proceso de derivación se conoce como *derivada implícita.*

Hallar y’, dado que $xy + x - 2y - 1 = 0$

$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} - 2\frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$xy' + y + 1 - 2y' = 0$$

$$y' = \frac{1 + y}{2 - x}$$

UNIDAD 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 Recta tangente y recta normal a una curva en un punto. Curvas ortogonales.

PENDIENTE DE LA TANGENTE A LA CURVA. Es igual al valor de la derivada en cualquier punto. Se representa matemáticamente:

$$m_t = \frac{dy}{dx} \quad P(x, y)$$

Donde: m_t es la pendiente de la tangente a la curva

$\frac{dy}{dx}$ es la derivada de la curva

PENDIENTE DE LA NORMAL A LA CURVA. Es igual a la reciproca de la pendiente de la tangente a la curva. Se representa matemáticamente:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Donde: m_n es la pendiente de la normal

m_t es la pendiente de la tangente a la curva

ECUACION DE LA TANGENTE.	ECUACION DE LA NORMAL
DATOS: $P(x_1, y_1)$ $\quad y - y_1 = m_t(x - x_1)$ m_n = ?	DATOS: $P(x_1, y_1)$ $\quad y - y_1 = m_n(x - x_1)$ m_n = ?

5.2 Teorema de Rolle, teorema de Lagrange o teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Si $f(x)$ es continua en el intervalo [a, b] y se anula en sus extremos, y tiene una derivada $f'(x)$ en todo punto interior del intervalo, entonces existe por lo menos un valor de x, comprendido entre a y b, en el que $f'(x)$ es igual a cero

5.3 Función creciente y decreciente. Máximos y mínimos de una función. Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos. Concavidades y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función $y = f(x)$ se llama *función creciente* si y *aumenta* (algebraicamente) cuando x aumenta. Una función $y = f(x)$ se llama función *decreciente* si y disminuye (algebraicamente) cuando x aumenta.

Criterio para averiguar el carácter creciente o decreciente en un punto:

> Una *función es creciente* cuando su *derivada es positiva*; es *decreciente* cuando su *derivada es negativa*

MÁXIMOS Y MÍNIMOS (CRITERIOS DE LA PRIMERA DERIVADA)

Las condiciones generales para máximos y mínimos de f(x):

> $f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$cambia de signo pasando de $+$ a $-$
>
> $f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$cambia de signo pasando de – a $+$

PRIMER MÉTODO PARA CALCULAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN. REGLA GUÍA EN LAS APLICACIONES.

PRIMER PASO. Se halla la primera derivada de la función
SEGUNDO PASO. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.
TERCER PASO. Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor *que el valor critico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente $+$ y después $-$, la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable; en caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Un punto de inflexión es una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos.

La regla comprende también instrucciones para examinar el sentido de la concavidad
PRIMER PASO. SE HALLA $f''(x)$
SEGUNDO PASO. Se iguala a cero $f''(x)$, se resuelve la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación
TERCER PASO. Se calcula, primero para valores de x un poco menores y después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si $f''(x)$ cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.

Cuando $f''(x)$ es *positivo,* la curva es *cóncava hacia arriba*	
Cuando $f''(x)$ es *negativa*, la curva es *cóncava hacia abajo*	

MÁXIMOS Y MÍNIMOS (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA)

Las condiciones suficientes para máximos y mínimos de $f(x)$ correspondientes a valores críticos de la variable son, pues, las siguientes:

$f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ es negativa
$f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ es positiva

REGLA GUÍA EN LAS APLICACIONES.
PRIMER PASO. Se halla la primera derivada de la función
SEGUNDO PASO. Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable.
TERCER PASO. Hallar la segunda derivada.
CUARTO PASO. Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el *resultado es negativo*, la función tiene *un máximo* para este valor crítico; si el *resultado es positivo*, la función tiene *un mínimo*.

5.4 Análisis de la variación de funciones

5.5 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial.

5.6 Problemas de optimización y de tasas relacionadas.